Dessins d'enfants

Chevrinais Jules, Eric Andriana Fitia, Lesauvage Leslie,
Miroshnikova Sofia, Ungria Adèle

Décembre 2025

Résumé

1 Introduction

À la suite des travaux de Belyi, Groethendick savait qu'un groupe de Galois (le groupe des automorphismes de corps de L laissant K invariant point par point) agissait sur les revêtements de la sphère de Rieémann. Ayant compris qu'un tel revêtement pouvait être décrit par le graphe issu du relèvement d'une certaine configuration de lacets, il écrivit dans *Esquisses d'un programme* :

Citation 1. "*Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est trouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable. Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffonné sur un bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple parfaitement explicite. A un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus.*"

C'est ainsi que la notion de **dessin d'enfant émergea**.

Définition 1. Un dessin d'enfant est un graphe abstrait connexe muni d'une structure bipartite sur ses sommets et d'un ordre cyclique des arêtes concourantes en un même sommet.

Son ensemble des sommets peut être décomposé en union disjointe de deux sous-ensembles B et N de manière à ce que chaque arête ait un seul sommet de chaque sous-ensemble. On pourrait colorier les sommets appartenant à B en blanc, et les arêtes appartenant à N en noir. Une arête aurait, donc, un sommet blanc et un sommet noir.

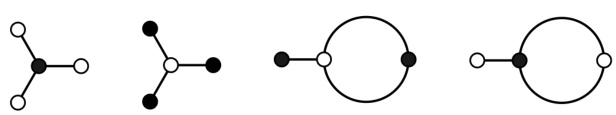

FIGURE 1 – Dessins d'enfant

2 Concepts

Avant de comprendre le cœur du travail de Grothendieck il est important de maîtriser les concepts fondateurs de ses théories. Commençons par expliquer les corps et les extensions de corps.

2.1 Corps et extensions

Définition 2. Soient K un corps et L un autre corps. On dit que L est une *extension de corps* de K si K est un sous-corps de L. On note alors l'extension L/K.

Autrement dit, tous les éléments de K sont dans L, et les opérations d'addition, de multiplication et de passage à l'inverse dans K sont les mêmes que celles de L.

Définition 3. Soit L/K une extension de corps et soit $\alpha \in L$. On dit que α est *algébrique sur* K s'il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Si tous les éléments de L sont algébriques sur K, on dit que l'extension L/K est une *extension algébrique*.

Définition 4. Soit L/K une extension de corps. Le *degré* de l'extension, noté $[L : K]$, est la dimension du K-espace vectoriel L. Autrement dit,

$$[L : K] = \dim_K L.$$

Si ce nombre est fini, on dit que l'extension est *finie*.

Exemple 1. Par exemple, $\mathbb{C}$ est une extension algébrique de $\mathbb{R}$ de degré 2 puisque

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 \quad \text{et} \quad \mathbb{C} = \{a + ib, a, b \in \mathbb{R}, i \notin \mathbb{R}\}$$

et que i est solution du polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$: $X^2 + 1$

On peut le voir autrement en disant que le plus petit corps qui contienne i et $\mathbb{R}$ est $\mathbb{C}$.

Remarque. Le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ est l'extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Ce corps est encore méconnu : bien qu'on arrive à le définir formellement (par exemple, $\pi \notin \overline{\mathbb{Q}}$), on ne sait pas le décrire explicitement.

Nous allons maintenant évoquer deux notions complexes utilisées pour définir le groupe de Galois.

Définition 5. Soient K un corps commutatif et L son extension algébrique. *Une clôture algébrique* de K est une extension algébrique de K algébriquement close, soit dont tous les polynômes de degré supérieur ou égal à un, à coefficients dans L, admettent au moins une racine dans L.

Définition 6. Soit K un corps commutatif. *Une clôture séparable* de K est une extension algébrique séparable (pas forcément finie) de K, qui est séparablement close, notée $Ksep$, c'est-à-dire que toute extension finie séparable de K est égale à K.

Remarque. Autrement dit : L est la plus petite extension de K qui contient toutes les racines des polynômes séparables à coefficients dans K.

Exemple 2. Prenons $K = F_p(t)$ le corps des fractions, soit l'ensemble des fractions $\frac{P(t)}{Q(t)}$, où $P(t)$ et $Q(t)$ sont des polynômes dans $F_p[t]$ et $Q \neq 0$. Maintenant considérons le polynôme $X^2 - t \in K[X]$. Ce polynôme est séparable car sa dérivée est **non nulle**, $(X^2)\prime = 2X$, donc il ne possède pas de racine multiple dans une clôture algébrique. La *clôture séparable de* K contiendra les racines de f, c'est-à-dire $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$.

2.2 Groupe de Galois

Maintenant que vous avez compris ce que sont les extensions de corps, nous allons rentrer dans l'aspect géométrique de ces notions avec le fameux groupe de Galois.

Définition 7. Soit L et K deux corps commutatifs. Le *groupe de Galois* $Gal(L/K)$ d'une extension algébrique de L sur K est le groupe des automorphismes de corps de L laissant K invariant point par point.

Exemple 3.

$$Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \sigma_1 : z \mapsto z; \quad \sigma_2 : z \mapsto \overline{z}$$

En effet, les deux seules applications sur $\mathbb{C}$ laissant $\mathbb{R}$ invariant sont l'identité et la conjugaison. Dans les deux cas les deux réels a et b ne sont pas modifiés. On peut voir le lien avec les deux solutions du polynôme $X^2 + 1$: i et $-i$.

Remarque. Ces applications sont exactement définies par permutation des racines du polynôme $X^2 + 1$: en prenant i, l'application devient l'identité, soit aucun changement, car j'envoie i sur $-i$ (et réciproquement), ce qui correspond exactement à la conjugaison complexe.

Définition 8. Soit K un corps commutatif. le *groupe de Galois absolu* de K est le groupe de Galois d'une clôture séparable de ce corps K. On le note $Gal(Ksep/K)$.

Remarque. Le groupe de Galois normal agit sur les extensions algébriques alors que le groupe de Galois absolu sur les extensions séparables, qui sont aussi algébriques. Cela induit des groupes infinis, c'est le cas de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Définition 9. Soit K un corps et L une extension du corps K. *L'action de Galois* est le "déplacement" des éléments de L via les applications appartenant au groupe de Galois $Gal(L/K)$, soit en préservant la structure algébrique de L.

Exemple 4. L'application de σ_1 et σ_2 aux éléments de $\mathbb{C}$ est une action de Galois.

2.3 Les revêtements

Afin de comprendre au mieux les revêtements, nous allons d'abord aborder la notion d'homéomorphisme.

Définition 10. Un *homéomorphisme* est une application bijective continue, d'un espace topologique dans un autre, dont la bijection réciproque est continue. Dans ce cas, les deux espaces topologiques sont dits homéomorphes.

Définition 11. Soit $\mathrm{V}^{(\mathrm{i})}$ des ouverts de E un corps, et B un corps. Le *revêtement étale* est une application p, continue, locale et surjective telle que tout point de B appartienne à un ouvert U de manière à ce que l'image réciproque de U par p soit une union disjointe d'ouverts de E, chacun homéomorphe local à U par p. Autrement dit :

$$p : E \to B$$

$$x \in B \implies x \in U \quad p^{-1}(U) = \coprod_i V_i$$

Remarque. Tout revêtement est un homéomorphisme local.

Définition 12. Un *revêtement ramifié* est un revêtement qui peut avoir des points critiques où l'application n'est pas localement bijective.

Remarque. Un point de ramification, ou une valeur critique de f, est la valeur de f en un zéro de la dérivée $f\prime$.

2.4 Topologie et espaces projectifs

Définition 13. Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie. *L'espace projectif* est l'ensemble des droites vectorielles de E, noté $P(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des sous-espaces de dimension 1 de E. Un élément de $P(E)$ est appelé un point. Par convention, si E est de dimension n, on dit que la dimension de $P(E)$ est $n - 1$.

Remarque. Si K est fini et si E est de dimension finie, $P(E)$ est fini

Définition 14. La sphère projective est l'espace projectif réel de dimension 2. Elle est définie comme étant l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine.

Exemple 5. Dans le cas de $\mathbb{R}^3$ la sphère projective est l'ensemble des directions de $\mathbb{R}^3$, x, y et z avec des **antipodes**, les points $[x, y, z]$ et $[-x, -y, -z]$, représentant le même point et formant ainsi une sphère.

Définition 15. Une *variété algébrique* est l'ensemble des solutions communes d'un nombre fini d'équations polynomiales en plusieurs variables, muni d'une structure géométrique naturelle.

Définition 16. Soit K un corps, en géométrie algébrique, une *courbe algébrique* sur K est une variété algébrique de dimension 1 définie sur K. Cela signifie qu'elle est décrite par des équations polynomiales, et qu'elle est, du point de vue géométrique, « de dimension 1 » (elle ressemble à une ligne).

Définition 17. Une courbe projective lisse est une courbe algébrique.

Définition 18. Une *surface de Riemann* est une variété complexe de dimension 1, c'est-à-dire un espace topologique localement homéomorphe à $\mathbb{C}$ et muni d'une structure holomorphe.

Définition 19. La *sphère de Riemann* est une manière de prolonger le plan des nombres complexes avec un point additionnel à l'infini, de manière que certaines expressions mathématiques deviennent convergentes et élégantes, du moins dans certains contextes. Ce plan s'appelle également la droite projective complexe, dénoté $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

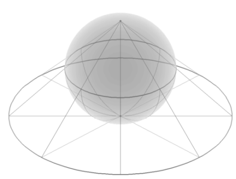

Figure 2 – Sphère de Rieman

Remarque. La sphère projective et la sphère de Riemann sont bien deux notions distinctes. Si elles sont toutes les deux appelées sphères :
- la sphère projective est réelle, soit liée à $\mathbb{R}$, notée $P^2(\mathbb{R})$
- la sphère de Riemann est une représentation géométrique de la droite projective complexe $P^1(\mathbb{C})$, donc liée à $\mathbb{C}$. ,

3 Des travaux de Belyi jusqu'aux dessins d'enfants

3.1 Le théorème de Belyi

Définition 20. Soit C une courbe lisse projective et géométriquement connexe. Une *fonction de Belyi* est une fonction algébrique $f : C \to P^1$, non ramifiée en dehors de $\{0, 1, \infty\}$.

Remarque. La paire (C, f) est appelée *paire de Belyi*.

Définition 21. Deux paires de Belyi (C_1, f_1) et (C_2, f_2) sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $i : C_1 \to C_2$ tel que $f_1 = f_2 \circ i$.

Théorème 1. Soit C une courbe lisse projective et géométriquement connexe, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors il existe une fonction de Belyi $f : C \to P^1$ qui est un revêtement ramifié de la sphère de Riemann.

3.2 Dessins d'enfants

Il nous reste à appliquer ce théorème à l'un des objets principaux du travail de Grothendieck : les dessins d'enfants.

Définition 22. Les *dessins d'enfants* sont des revêtements ramifiés de la sphère projective $P^1(C)$ ramifiés au-dessus de $\{0, 1, \infty\}$.
Il est aussi possible de voir un *dessin d'enfant* comme une classe d'isomorphisme de paires de Belyi.

3.3 Fonction de Belyi et les dessins d'enfants

Exemple 6. Soit $f(x) = x^3$ une fonction de Belyi. Tous les sommets noirs (points critiques) sont des racines de l'équation $f(x) = 0$, la multiplicité de chaque racine est égale au degré du sommet. $x^3 = 0$ Alors le sommet noir a le degré 3. Tous les sommets blancs (points « simples » (non-critiques)) sont des racines de l'équation f (x) = 1. L'image réciproque $f^{-1}(1)$ se compose de 3 racines de l'unité. Il est clair que $f^{-1}([0, 1])$ est une figure montrée en bas.

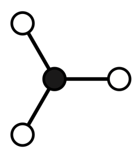

FIGURE 3 – Dessins d'enfant

Il est également possible de passer d'un dessin d'enfant à une fonction de Belyi.

4 Applications des dessins d'enfants

4.1 La théorie de Galois inverse et les dessins d'enfants

Théorème 2. La *théorie partielle de Galois inverse* est une branche de la théorie de Galois. On part d'une extension $Gal(L/K)$ et on calcule son groupe de Galois. La *théorie de Galois inverse* consiste à faire le **chemin inverse** : on part d'un groupe G et on veut construire une extension ayant ce groupe comme groupe de Galois. Ainsi il est conjecturé que *tout groupe fini G est réalisable comme groupe de Galois d'une extension galoisienne de* $\mathbb{Q}$

Malgré d'importants progrès durant les trente dernières années du XX^e siècle et un grand nombre de résultats établis, la théorie reste une vaste conjecture. Ce problème est ouvert, mais il est possible d'en résoudre des cas particuliers en construisant des *dessins d'enfants* définis sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration par étapes :

1. Construction combinatoire : on construit un dessin d'enfant D dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à G.

2. Passage à la géométrie algébrique : Par le théorème de Belyi (réciproque), ce dessin correspond à une courbe algébrique lisse projective X définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et à un morphisme de Belyi $f : X \to \mathbb{P}^1$ ramifié uniquement en $\{0, 1, \infty\}$.

3. Extension de corps de fonctions et résultat géométrique : Le revêtement f induit une extension de corps de fonctions : $\mathbb{Q}(X)/\mathbb{Q}(t)$ dont le groupe de Galois est isomorphe à G. $\mathbb{Q}(t)$ étant l'ensemble des corps de fractions rationnelles sur $\mathbb{Q}$
Ainsi tout groupe fini G est réalisable comme groupe de Galois d'une extension de $\mathbb{Q}(t)$

On constate ici que les dessins d'enfants permettent de résoudre Galois inverse sur $\mathbb{Q}(t)$ mais non sur $\mathbb{Q}$.

Exemple 7. : Groupe Galois inverse sur S_3

Nous illustrons la méthode précédente sur le groupe symétrique S_3 de cardinal 6. Un groupe symétrique, ici, désigne l'ensemble des permutations d'un ensemble à 3 éléments.

Construction combinatoire : le groupe S_3 admet un groupe de présentation comme groupe engendré par de présentation :

$$\sigma_0 = (12), \sigma_1 = (123)$$

satisfaisant

$$\sigma_0^2 = \sigma_0^3 = (\sigma_0\sigma_1)^2 = 1$$

On obtient alors un dessin d'enfant à 2 sommets noirs (cycles de σ_0) et 3 sommets blancs (cycles de σ_1). On a alors une triangulation de la sphère et son groupe d'automorphismes combinatoires est isomorphe à S_3.

Passage à la géométrie algébrique : d'après le théorème de Belyi (réciproque), ce dessin d'enfants correspond à : une courbe algébrique lisse projective X définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ un morphisme fini $f : X \to \mathbb{P}^1$ ramifié uniquement en $\{0, 1, \infty\}$.
On a alors l'application de Belyi :

$$f(x) = (x^2 - 1)^3 / x^2(x^2 - 9)$$

Extension de corps de fonctions et résultats géométrique : Le morphisme f induit une extension de corps de fonctions
$\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}(f(x))$, qui est une extension de degré 6 (nombre de permutations). On obtient alors :

$$Gal(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}(f(x)) = S_3$$

On a donc le groupe S_3 réalisable comme groupe de Galois d'une extension galoisienne de $\mathbb{Q}(t)$.

Références

American Mathematical Society. (2003). What is ... ? (Notices of the American Mathematical Society) [Disponible sur https ://www.ams.org/notices/200307/what-is.pdf].

Cours/Notes. (2025). Définitions, Université Côte d'Azur [Disponible sur https ://math.univ-cotedazur.fr/ ah/ens/cours/proj/def.pdf].

Eriksson, ((2011). From Galois to Riemann to Grothendieck) [Disponible sur https ://ncm.gu.se/pdf/normat/Eriksson.pdf].

Jamin, T. (2025a). Cours d'algèbre linéaire.

Jamin, T. (2025b). Cours de théorie des graphes.

Parrochia, D. (2023). *Graphes, Réseaux, Structures et Dessins d'enfants* (Preprint) (HAL Preprint hal-03918127v1 — https ://hal.science/hal-03918127/document). Université de Lyon.

Yves, A. (2024). IDÉES GALOISIENNES [Téléchargeable sur https ://portail.polytechnique.edu/editions/sites/editions/files/content/pages/documents/2024-12/extrait$_1$54.*pdf*].